Notes on Dual Quaternion Exp/Log

適用ライブラリ : http://xelf.codeplex.com/

Dual Quaternion / デュアルクォータニオン

対数と指数のメモ

Notation / 記法

ここでは、デュアルクォータニオンを次のように表現することにする。

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \widehat{q_v} \\ \widehat{q_w} \end{bmatrix} = q_r + \varepsilon q_d = \begin{bmatrix} q_{rv} + \varepsilon q_{dv} \\ q_{rw} + \varepsilon q_{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{rx} + \varepsilon q_{dx} \\ q_{ry} + \varepsilon q_{dy} \\ q_{rz} + \varepsilon q_{dz} \end{pmatrix} \\ q_{rw} + \varepsilon q_{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{rx} \\ q_{ry} \\ q_{rz} \end{pmatrix} \\ q_{rw} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{dx} \\ q_{dy} \\ q_{dz} \end{pmatrix} \\ q_{dw} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\varepsilon^2 = 0 \tag{2}$$

ハット「＾」は二元数を示している。

ベクトルは原則としてかき分けないものとする。明示には、$\vec{v}$のように矢印「$\overrightarrow{\ }$」を用いる。

Logarithm of Quaternion and Exponential of Quaternion

クォータニオンの対数と指数

クォータニオンの対数と指数は、次のように計算できる。

$$q = \begin{bmatrix} q_v \\ q_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{rx} \\ q_{ry} \\ q_{rz} \end{pmatrix} \\ q_{rw} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\ln q = \begin{bmatrix} \dfrac{q_v}{|q_v|}\cos^{-1}\left(\dfrac{q_w}{|q|}\right) \\ \ln(|q|) \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\exp q = \exp(q_w)\begin{bmatrix} \dfrac{q_v}{|q_v|}\sin(|q_v|) \\ \cos(|q_v|) \end{bmatrix} \tag{5}$$

これらは変数を二元数に変えることで、デュアルクォータニオンにも適用できる。

$$\ln \hat{q} = \begin{bmatrix} \dfrac{\widehat{q_v}}{|\widehat{q_v}|}\cos^{-1}\left(\dfrac{\widehat{q_w}}{|\hat{q}|}\right) \\ \ln(|\hat{q}|) \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\exp \hat{q} = \exp(\widehat{q_w})\begin{bmatrix} \dfrac{\widehat{q_v}}{|\widehat{q_v}|}\sin(|\widehat{q_v}|) \\ \cos(|\widehat{q_v}|) \end{bmatrix} \tag{7}$$

以下では、直に数値演算ができるように、実部と非実部を分離した変形結果を示す。

Dual Logarithm (Logarithm of Dual Quaternion)

デュアルクォータニオンの対数

$$\ln \hat{q} = \begin{bmatrix} \dfrac{\widehat{q_v}}{|\widehat{q_v}|}\cos^{-1}\left(\dfrac{\widehat{q_w}}{|\hat{q}|}\right) \\ \ln(|\hat{q}|) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{q_{rv} + \varepsilon q_{dv}}{|q_v| + \varepsilon \dfrac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}\cos^{-1}\left(\dfrac{q_{rw} + \varepsilon q_{dw}}{|q_r| + \varepsilon \dfrac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}}\right) \\ \ln\left(|q_r| + \varepsilon \dfrac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}\right) \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\dfrac{q_{rv}}{|q_{rv}|} + \varepsilon \dfrac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv}\dfrac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{vr}|^2}\right)\left(\cos^{-1}\left(\dfrac{q_{rw}}{|q_r|}\right) - \varepsilon \dfrac{q_{dw}|q_r| - q_{rw}\dfrac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}}{|q_r|^2\sqrt{1 - \left(\dfrac{q_{rw}}{|q_r|}\right)^2}}\right) \\ \ln(|q_r|) + \varepsilon \dfrac{q_r \cdot q_d}{|q_r|^2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|}\cos^{-1}\left(\frac{q_{rw}}{|q_r|}\right) + \varepsilon\left(\frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv}\frac{q_{rv}\cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{vr}|^2}\cos^{-1}\left(\frac{q_{rw}}{|q_r|}\right) - \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|}\frac{q_{dw}|q_r| - q_{rw}\frac{q_r\cdot q_d}{|q_r|}}{|q_r|^2\sqrt{1-\left(\frac{q_{rw}}{|q_r|}\right)^2}}\right) \\ \ln(|q_r|) + \varepsilon\frac{q_r\cdot q_d}{|q_r|^2} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\ln(\hat{q}) = \begin{bmatrix} \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|}\cos^{-1}\left(\frac{q_{rw}}{|q_r|}\right) \\ \ln(|q_r|) \end{bmatrix} + \varepsilon\begin{bmatrix} \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv}\frac{q_{rv}\cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2}\cos^{-1}\left(\frac{q_{rw}}{|q_r|}\right) - \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|}\frac{q_{dw}|q_r| - q_{rw}\frac{q_r\cdot q_d}{|q_r|}}{|q_r|^2\sqrt{1-\left(\frac{q_{rw}}{|q_r|}\right)^2}} \\ \frac{q_r\cdot q_d}{|q_r|^2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

式の一部を別の変数に割り当てて整理

$l = \lvert q_r \rvert$	$w = q_{rw} r$
$r = \frac{1}{l}$	$d = q_r \cdot q_d$
$c = r_v \cos^{-1}(w)$	$d_v = q_{rv} \cdot q_{dv}$
$s = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$	$r_v = \frac{1}{\lvert q_{rv} \rvert}$

$$\ln(\hat{q}) = \begin{bmatrix} c\overrightarrow{q_{rv}} \\ \ln(l) \end{bmatrix} + \varepsilon\begin{bmatrix} c\overrightarrow{q_{dv}} - \left(d_v r_v^2 c - r_v s r(q_{dw} - w d r)\right)\overrightarrow{q_{rv}} \\ d r^2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Logarithm of Unit Dual Quaternion

単位デュアルクォータニオンの対数

$\hat{q}$が単位デュアルクォータニオンとわかっている場合、$|\widehat{q_r}| = |q_r| = 1$であり、$\ln(|q_r|) = \ln(1) = 0$となるので、結果は次のように、$p_{rw} = 0$になる。全体の演算は若干簡単になる。

$$\hat{p} = \ln(\hat{q}) = \begin{bmatrix} \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \cos^{-1}(q_{rw}) \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \cos^{-1}(q_{rw}) - \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \frac{q_{dw} - q_{rw}(q_r \cdot q_d)}{\sqrt{1 - {q_{rw}}^2}} \\ q_r \cdot q_d \end{bmatrix} \tag{14}$$

$l = \|q_r\| = 1$	$w = q_{rw} r = q_{rw}$
$r = \frac{1}{l} = 1$	$d = q_r \cdot q_d$
$c = r_v \cos^{-1}(w) = r_v \cos^{-1}(q_{rw})$	$d_v = q_{rv} \cdot q_{dv}$
$s = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}$	$r_v = \frac{1}{\|q_{rv}\|}$

$$\hat{r} = \ln(\hat{q}) = \begin{bmatrix} c\overrightarrow{q_{rv}} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} c\overrightarrow{q_{dv}} - \left(d_v r_v^2 c - r_v s(q_{dw} - q_{rw} d)\right)\overrightarrow{q_{rv}} \\ d \end{bmatrix} \tag{15}$$

Dual Exponential (Exponential of Dual Quaternion)

デュアルクォータニオンの指数

$$\exp \hat{q} = \exp(\widehat{q_w}) \begin{bmatrix} \frac{\widehat{q_v}}{|\widehat{q_v}|} \sin(|\widehat{q_v}|) \\ \cos(|\widehat{q_v}|) \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$|\widehat{q_v}| = |q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \tag{17}$$

$$= \exp(q_{rw} + \varepsilon q_{dw}) \begin{bmatrix} \frac{q_{rv} + \varepsilon q_{dv}}{|q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}} \sin\left(|q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}\right) \\ \cos\left(|q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}\right) \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$= (\exp(q_{rw}) + \varepsilon q_{dw} \exp(q_{rw})) \begin{bmatrix} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} + \varepsilon \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2}\right)\left(\sin(|q_{rv}|) + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \cos(|q_{rv}|)\right) \\ \cos(|q_{rv}|) - \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \sin(|q_{rv}|) \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} + \varepsilon \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2}\right)\left(\exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \varepsilon \left(q_{dw} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \cos(|q_{rv}|)\right)\right) \\ \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) + \varepsilon \left(q_{dw} \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) - \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \sin(|q_{rv}|)\right) \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \varepsilon \left(\frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \left(q_{dw} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \cos(|q_{rv}|) \right) \right) \right) \\ \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) + \varepsilon \left(q_{dw} \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) - \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \sin(|q_{rv}|) \right) \end{bmatrix} \tag{21}$$

式の一部を別の変数に割り当てて整理

$x = \exp(q_{rw})$	$v = \|q_{rv}\|$
$c_r = \cos(v)$	$d = \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{v}$
$c = xc_r$	$r = \frac{1}{v}$
$s = x \sin(v)$	$s_r = sr$

$$\exp \hat{q} = \begin{bmatrix} q_{rv} rs + \varepsilon(q_{dv} s - q_{rv}(rsd + (q_{dw} s + cd))r \\ c + \varepsilon(q_{dw} c - sd) \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\exp \hat{q} = \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{rv}} \\ c \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{dv}} - (q_{dw} s + (s_r + c)d) r \overrightarrow{q_{rv}} \\ q_{dw} c - sd \end{bmatrix} \tag{23}$$

Exponential of Logarithm of Unit Dual Quaternion

前述のように、単位デュアルクォータニオン$\hat{a}$の対数は、$\ln \hat{a} = \begin{bmatrix} q_{rv} \\ q_{rw} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} q_{dv} \\ q_{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{rv} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} q_{dv} \\ q_{dw} \end{bmatrix}$のように、$q_{rw} = 0$ になる。

この条件$q_{rw} = 0$に限定すれば、次のように若干の演算が省略できる。

$x = \exp(q_{rw}) = \exp(0) = 1$	$v = \|q_{rv}\|$
$c_r = \cos(v)$	$d = \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{v}$
$c = xc_r = c_r$	$r = \frac{1}{v}$
$s = x \sin(v) = \sin(v)$	$s_r = sr$

$$\exp \hat{q} = \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{rv}} \\ c \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{dv}} - (s_r + c) dr \overrightarrow{q_{rv}} \\ q_{dw} c - sd \end{bmatrix} \tag{24}$$