

Notes on Dual Quaternion Exp/Log

©2011 XELF <http://xelf.info/>

適用ライブラリ: <http://xelf.codeplex.com/>

Dual Quaternion / デュアルクォータニオン

対数と指数のメモ

Notation / 記法

ここでは、デュアルクォータニオンを次のように表現することにする。

$$\hat{q} = \begin{bmatrix} \hat{q}_v \\ \hat{q}_w \end{bmatrix} = q_r + \varepsilon q_d = \begin{bmatrix} q_{rv} + \varepsilon q_{dv} \\ q_{rw} + \varepsilon q_{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{rx} + \varepsilon q_{dx} \\ q_{ry} + \varepsilon q_{dy} \\ q_{rz} + \varepsilon q_{dz} \\ q_{rw} + \varepsilon q_{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{rx} \\ q_{ry} \\ q_{rz} \\ q_{rw} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} q_{dx} \\ q_{dy} \\ q_{dz} \\ q_{dw} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\varepsilon^2 = 0 \quad (2)$$

ハット「 $\hat{\quad}$ 」は二元数を示している。

ベクトルは原則としてかき分けられないものとする。明示には、 \vec{v} のように矢印「 $\vec{\quad}$ 」を用いる。

Logarithm of Quaternion and Exponential of Quaternion

クォータニオンの対数と指数

クォータニオンの対数と指数は、次のように計算できる。

$$q = \begin{bmatrix} q_v \\ q_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{rx} \\ q_{ry} \\ q_{rz} \\ q_{rw} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\ln q = \begin{bmatrix} \frac{q_v}{|q_v|} \cos^{-1} \left(\frac{q_w}{|q|} \right) \\ \ln(|q|) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\exp q = \exp(q_w) \begin{bmatrix} \frac{q_v}{|q_v|} \sin(|q_v|) \\ \cos(|q_v|) \end{bmatrix} \quad (5)$$

これらは変数を二元数に変えることで、デュアルクォータニオンにも適用できる。

$$\ln \hat{q} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{q}_v}{|\hat{q}_v|} \cos^{-1} \left(\frac{\hat{q}_w}{|\hat{q}|} \right) \\ \ln(|\hat{q}|) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\exp \hat{q} = \exp(\hat{q}_w) \begin{bmatrix} \frac{\hat{q}_v}{|\hat{q}_v|} \sin(|\hat{q}_v|) \\ \cos(|\hat{q}_v|) \end{bmatrix} \quad (7)$$

以下では、直に数値演算ができるように、実部と非実部を分離した変形結果を示す。

Dual Logarithm (Logarithm of Dual Quaternion)

デュアルクォータニオンの対数

$$\ln \hat{q} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{q}_v}{|\hat{q}_v|} \cos^{-1} \left(\frac{\hat{q}_w}{|\hat{q}|} \right) \\ \ln(|\hat{q}|) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{q_{rv} + \varepsilon q_{dv}}{|q_v| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}} \cos^{-1} \left(\frac{q_{rw} + \varepsilon q_{dw}}{|q_r| + \varepsilon \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}} \right) \\ \ln \left(|q_r| + \varepsilon \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|} \right) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} + \varepsilon \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \right) \left(\cos^{-1} \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right) - \varepsilon \frac{q_{dw}|q_r| - q_{rw} \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}}{|q_r|^2 \sqrt{1 - \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right)^2}} \right) \\ \ln(|q_r|) + \varepsilon \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \cos^{-1} \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right) + \varepsilon \left(\frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \cos^{-1} \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right) - \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \frac{q_{dw}|q_r| - q_{rw} \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}}{|q_r|^2 \sqrt{1 - \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right)^2}} \right) \\ \ln(|q_r|) + \varepsilon \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|^2} \end{array} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \ln(\hat{q}) \\ &= \left[\begin{array}{c} \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \cos^{-1} \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right) \\ \ln(|q_r|) \end{array} \right] \\ &+ \varepsilon \left[\begin{array}{c} \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \cos^{-1} \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right) - \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \frac{q_{dw}|q_r| - q_{rw} \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|}}{|q_r|^2 \sqrt{1 - \left(\frac{q_{rw}}{|q_r|} \right)^2}} \\ \frac{q_r \cdot q_d}{|q_r|^2} \end{array} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

式の一部を別の変数に割り当てて整理

$l = q_r $	$w = q_{rw}r$
$r = \frac{1}{l}$	$d = q_r \cdot q_d$
$c = r_v \cos^{-1}(w)$	$d_v = q_{rv} \cdot q_{dv}$
$s = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$	$r_v = \frac{1}{ q_{rv} }$

$$\ln(\hat{q}) = \left[\begin{array}{c} c\overrightarrow{q_{rv}} \\ \ln(l) \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} c\overrightarrow{q_{dv}} - (d_v r_v^2 c - r_v s r (q_{dw} - w d r))\overrightarrow{q_{rv}} \\ d r^2 \end{array} \right] \quad (13)$$

Logarithm of Unit Dual Quaternion

単位デュアルクォータニオンの対数

\hat{q} が単位デュアルクォータニオンとわかっている場合、 $|\hat{q}_r| = |q_r| = 1$ であり、 $\ln(|q_r|) = \ln(1) = 0$ となるので、結果は次のように、 $p_{rw} = 0$ になる。全体の演算は若干簡単になる。

$$\hat{p} = \ln(\hat{q}) = \begin{bmatrix} \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \cos^{-1}(q_{rw}) \\ 0 \\ \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \cos^{-1}(q_{rw}) - \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \frac{q_{dw} - q_{rw}(q_r \cdot q_d)}{\sqrt{1 - q_{rw}^2}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$l = q_r = 1$	$w = q_{rw}r = q_{rw}$
$r = \frac{1}{l} = 1$	$d = q_r \cdot q_d$
$c = r_v \cos^{-1}(w) = r_v \cos^{-1}(q_{rw})$	$d_v = q_{rv} \cdot q_{dv}$
$s = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}$	$r_v = \frac{1}{ q_{rv} }$

$$\hat{r} = \ln(\hat{q}) = \begin{bmatrix} c\vec{q}_{rv} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} c\vec{q}_{dv} - (d_v r_v^2 c - r_v s(q_{dw} - q_{rw}d))\vec{q}_{rv} \\ d \end{bmatrix} \quad (15)$$

Dual Exponential (Exponential of Dual Quaternion)

デュアルクォータニオンの指数

$$\exp \hat{q} = \exp(\widehat{q}_w) \begin{bmatrix} \frac{\widehat{q}_v}{|\widehat{q}_v|} \sin(|\widehat{q}_v|) \\ \cos(|\widehat{q}_v|) \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$|\widehat{q}_v| = |q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \quad (17)$$

$$= \exp(q_{rw} + \varepsilon q_{dw}) \begin{bmatrix} \frac{q_{rv} + \varepsilon q_{dv}}{|q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}} \sin \left(|q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \right) \\ \cos \left(|q_{rv}| + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \right) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$= (\exp(q_{rw}) + \varepsilon q_{dw} \exp(q_{rw})) \begin{bmatrix} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} + \varepsilon \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \right) (\sin(|q_{rv}|) + \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \cos(|q_{rv}|)) \\ \cos(|q_{rv}|) - \varepsilon \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \sin(|q_{rv}|) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} + \varepsilon \frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|}}{|q_{rv}|^2} \right) \left(\exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \varepsilon (q_{dw} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \cos(|q_{rv}|)) \right) \\ \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) + \varepsilon (q_{dw} \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) - \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \sin(|q_{rv}|)) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \left(\frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \varepsilon \left(\frac{q_{dv}|q_{rv}| - q_{rv} \frac{q_{dv} \cdot q_{dw}}{|q_{rv}|} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \frac{q_{rv}}{|q_{rv}|} (q_{dw} \exp(q_{rw}) \sin(|q_{rv}|) + \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \cos(|q_{rv}|)) \right) \right) \\ \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) + \varepsilon (q_{dw} \exp(q_{rw}) \cos(|q_{rv}|) - \exp(q_{rw}) \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{|q_{rv}|} \sin(|q_{rv}|)) \end{array} \right) \quad (21)$$

式の一部を別の変数に割り当てて整理

$x = \exp(q_{rw})$	$v = q_{rv} $
$c_r = \cos(v)$	$d = \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{v}$
$c = xc_r$	$r = \frac{1}{v}$
$s = x \sin(v)$	$s_r = sr$

$$\exp \hat{q} = \begin{bmatrix} q_{rv}rs + \varepsilon(q_{dv}s - q_{rv}(rsd + (q_{dws} + cd))r \\ c + \varepsilon(q_{dwc} - sd) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\exp \hat{q} = \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{rv}} \\ c \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{dv}} - (q_{dws} + (s_r + c)d)r \overrightarrow{q_{rv}} \\ q_{dwc} - sd \end{bmatrix} \quad (23)$$

Exponential of Logarithm of Unit Dual Quaternion

前述のように、単位デュアルクォータニオン \hat{a} の対数は、 $\ln \hat{a} = \begin{bmatrix} q_{rv} \\ q_{rw} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} q_{dv} \\ q_{dw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{rv} \\ 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} q_{dv} \\ q_{dw} \end{bmatrix}$ のように、 $q_{rw} = 0$ になる。

この条件 $q_{rw} = 0$ に限定すれば、次のように若干の演算が省略できる。

$x = \exp(q_{rw}) = \exp(0) = 1$	$v = q_{rv} $
$c_r = \cos(v)$	$d = \frac{q_{rv} \cdot q_{dv}}{v}$
$c = xc_r = c_r$	$r = \frac{1}{v}$
$s = x \sin(v) = \sin(v)$	$s_r = sr$

$$\exp \hat{q} = \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{rv}} \\ c \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} s_r \overrightarrow{q_{dv}} - (s_r + c)dr \overrightarrow{q_{rv}} \\ q_{dwc} - sd \end{bmatrix} \quad (24)$$